Ο ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Richard McKirahan

Το θέμα μου σήμερα είναι "Αριστοτέλης και Μαθηματικά." Ενδιαφέρον θέμα και πολύπλοκο. Αλλά πρέπει να πω κάτι στην αρχή. Παρ' όλο που υπάρχουν γεωμετρικά θεωρήματα τα οποία πήραν το όνομά τους από τον Θαλή και τον Πυθαγόρα, κανένα δεν πήρε το όνομά του από τον Αριστοτέλη. Πράγματι, ο Αριστοτέλης δεν ήταν μαθηματικός, παρ' ό,τι ήταν κορυφαίας σημασίας στην ιστορία άλλων γνωστικών πεδίων. Εδώ μερικά παραδείγματα. Σύμφωνα με τον Δαρβίνο, ο Αριστοτέλης ήταν ο σπουδαιότερος βιολόγος που έζησε ποτέ. Σύμφωνα με τον John Rawls, τον καθηγητή του Harvard, το βιβλίο του οποίου *Θεωρία της Δικαιοσύνης* αναγνωρίζεται ευρέως ως ένα από τα σημαντικότερα έργα στο χώρο της κοινωνικής, πολιτικής και ηθικής φιλοσοφίας στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα, το βασικό ηθικό έργο του Αριστοτέλη, τα *Ηθικά Νικομάχεια*, είναι το καλύτερο βιβλίο ηθικής φιλοσοφίας που γράφτηκε ποτέ. Στη βιολογία, ο Σταγειρίτης προώθησε το ζήτημα της εμβρυολογίας αφάνταστα, και όπως ακούσαμε το πρωί, ήταν πατέρας, ή τουλάχιστον παππούς, της γενετικής. Επιπλέον, επινόησε τη λογική, και η θεωρία του για τον συλλογισμό διδάσκεται μέχρι σήμερα σε κάποια πανεπιστήμια. Η θεωρία του για τον φυσικό κόσμο, σε συνδυασμό με την αστρονομία του Πτολεμαίου, κυριάρχησε για περισσότερα από χίλια χρόνια και χρειάστηκαν οι συνδυασμένες ιδιοφυίες του Γαλιλαίου, του Kepler και του Νεύτωνα για να αντικατασταθεί. Όμως τη μαθηματική έρευνα την εμπιστεύτηκε σε χέρια άλλων.

Ωστόσο, ήταν ενήμερος για τις εξελίξεις στα μαθηματικά και είχε απόψεις για μαθηματικά ζητήματα. Στα έργα του υπάρχουν πολλές αναφορές στα μαθηματικά. Αυτό είναι ένα μεγάλο ζήτημα. Ο Thomas Heath, ο συγγραφέας του κύριου αγγλόγλωσσου έργου που καλύπτει ολόκληρη την ιστορία των ελληνικών μαθηματικών, μας άφησε μεταφράσεις και σχολιασμό των αριστοτελικών αποσπασμάτων που σχετίζονται με τα μαθηματικά. Φαίνεται ότι η έκδοση αυτού του υλικού τού είχε γίνει πάθος. Μετά από το θάνατό του η χήρα του έγραψε ότι "η σφοδρή επιθυμία του [να ολοκληρώσει] το έργο του… πιθανότατα συνέβαλε στην επίσπευση του τέλους του." Το 291 σελίδων βιβλίο εκδόθηκε το 1949 με τίτλο *Mathematics in Aristotle* και παραμένει μία από τις βασικές πηγές πληροφόρησης για αυτό το θέμα. Ο χρόνος μου επιτρέπει να παραθέσω λίγα μόνο παραδείγματα.

Πρώτον, ο Αριστοτέλης ήταν ενήμερος για τις τελευταίες εξελίξεις, τουλάχιστον σε κάποιες περιοχές των μαθηματικών, και κατανοούσε τις τεχνικές πλευρές τους σε βαθμό που του επέτρεπε να εκφράζει απόψεις. Για παράδειγμα, στα *Ἀναλυτικὰ Πρότερα* παρατήρησε ένα πρόβλημα στη θεωρία των παραλλήλων, όπως ήταν γνωστή εκείνη την εποχή, και είναι πιθανό ότι η παρατήτησή του προκάλεσε τον Ευκλείδη να εισηγάγει δύο πρόσθετα αιτήματα στη γεωμετρία του, για να λύσει αυτό το πρόλημα.

Επίσης ο Αριστοτέλης αντλούσε γενικά συμπεράσματα με βάση τη μαθηματική πρακτική. Για παράδειγμα, όπως ισχύει για όλα τα τρίγωνα, τα άθροισμα των γωνιών των ισοσκελών τριγώνων ισούται με δύο ορθές γωνίες και αυτό είναι δυνατόν να αποδειχθεί. Όμως δεν αρκεί απλώς να φτάσουμε στο σωστό συμπέρασμα· είναι σημαντικό να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα και με το σωστό τρόπο. Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι είναι εσφαλμένο να αποδεικνύουμε άμεσα αυτό το συγκεκριμένο συμπέρασμα· αντιθέτως, πρέπει να αποδείξουμε ότι σε όλα τα τρίγωνα το άθροισμα των γωνιών ισούται με δύο ορθές γωνίες —το οποίο συνεπάγεται αυτομάτως ότι το ίδιο ισχύει και για τα ισοσκελή τρίγωνα. Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι οι αποδείξεις πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο γενικές και ισχυρές, όχι μόνον επειδή έτσι απλοποιείται το έργο μιας επιστήμης, αλλά και επειδή έτσι τα πράγματα τίθενται στη σωστή σειρά. Τα ισοσκελή τρίγωνα διαθέτουν την εν λόγω ιδιότητα επειδή είναι τρίγωνα. Κάποιος, ο οποίος προτείνει μια ξεχωριστή απόδειξη ότι διαθέτουν αυτή την ιδιότητα, δεν κατανοεί αυτό το ουσιώδες γεγονός. Κατανοεί εσφαλμένα το *υποκείμενον γένος* (βλ. παρακάτω) της γεωμετρίας— με άλλα λόγια, δεν γνωρίζει για τί πράγμα μιλάει.

Η τρίτη συμβολή, την οποία θέλω να αναφέρω είναι η εκλεπτυσμένη αντίληψη του Αριστοτέλη για το άπειρο. Το άπειρο είναι μια έννοια που απαιτείται στα μαθηματικά και στη φυσική. Οι αριθμοί μπορούν να αυξάνονται *επ' άπειρον*· όποιον αριθμό και αν πάρουμε, πάντα θα υπάρχει ένας μεγαλύτερος αριθμός. Παρομοίως, οι συνεχείς γραμμές, οι αποστάσεις και τα χρονικά διαστήματα μπορούν να διαιρούνται *επ' άπειρον*. Μπορούμε πάντα να διαιρούμε μια γραμμή, μια απόσταση ή ένα χρονικό διάστημα δια δύο: μπορούμε να διαιρέσουμε μια γραμμή μήκους ενός μέτρου σε δύο γραμμές μήκους μισού μέτρου· μπορούμε να διαιρέσουμε ένα χρονικό διάστημα διάρκειας ενός λεπτού σε δύο διαστήματα διάρκειας μισού λεπτού. Και το ίδιο ισχύει και για τις γραμμές μήκους μισού μέτρου και για τα διαστήματα διάρκειας μισού λεπτού. Όσο και αν διαιρούμε, πάντα θα υπάρχουν μικρότερες γραμμές και μικρότερα χρονικά διαστήματα. Παλαιότεροι στοχαστές είχαν συζητήσει το πρόβλημα του απείρου. Πιο συγκεκριμένα, ο Ζήνων το είχε εκμεταλλευτεί για να αποδείξει την αμφιλεγόμενη άποψή του ότι η κίνηση είναι αδύνατη. Όμως για τον Αριστοτέλη η κίνηση βρίσκεται στην καρδιά της φυσικής, καθώς αντιλαμβάνεται τα αντικείμενα της φυσικής ως όντα που μπορούν να τεθούν σε κίνηση. Έτσι ήταν υποχρεωμένος να αντικρούσει τα επιχειρήματα του Ζήνωνος και για να το πετύχει αυτό χρειαζόταν να αποσαφηνίσει τη φύση του συνεχούς και του απείρου. Προσέφερε σημαντικό έργο προς αυτή την κατεύθυνση στα *Φυσικά*, όπου, όχι μόνον αντέκρουσε τα επιχειρήματα του Ζήνωνος, αλλά, επιπλέον, αναγνώρισε ότι το πρόβλημα του απείρου φτάνει βαθύτερα από όσο νόμιζε ο Ζήνων, κι έπειτα ανέπτυξε μια θεωρία για τη φύση του απείρου η οποία, αν και διαφέρει από τη σύγχρονη αντίληψη για το μαθηματικό άπειρο, ήταν συνεπής προς τη φυσική φιλοσοφία του, θεμελιωνόταν στη μεταφυσική διάκριση που είχε χαράξει ανάμεσα σε *ενεργεία* και *δυνάμει* και υπήρξε η κυρίαρχη άποψη (ακόμη και μεταξύ μαθηματικών) μέχρι τον δέκατο ένατο αιώνα.

Η απασχόληση του Αριστοτέλη με τα μαθηματικά είχε και γενικότερη επιρροή στις επιστήμες και στον τρόπο με τον οποίον τις εννοούμε. Θέτω ότι, από μια σημαντική άποψη, ο Αριστοτέλης επινόησε την έννοια του επιστημονικού κλάδου, πάλι με βάση τη μαθηματική πρακτική της εποχής του. Εν ολίγοις, πριν από τον Αριστοτέλη το πεδίο το οποίο ονομάζουμε θετική επιστήμη δεν διακρινόταν σε διαφορετικούς κλάδους. Το ίδιο κείμενο μπορούσε να καλύπτει θέματα από τη θεωρία της ύλης, τη φυσική, την κοσμολογία, την αστρονομία, τη μετεωρολογία, την ψυχολογία και τη βιολογία.

Αντιθέτως, σύμφωνα με τα *Αναλυτικά ύστερα,* κάθε επιστήμη διαθέτει ένα διακριτό πεδίο αντικειμένων το οποίο μελετά. Ο Αριστοτέλης ονομάζει αυτό το πεδίο *υποκείμενον γένος* και προσφέρει ως παραδείγματα διάφορους κλάδους των μαθηματικών. Η αριθμητική μελετά τους αριθμούς, ενώ η γεωμετρία μελετά τα *μεγέθη*. Κάθε γένος συνίσταται σε πράγματα τα οποία εκ φύσεως συνδέονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα, η γεωμετρία μελετά τις γραμμές, τους κύκλους, τα τρίγωνα, και ούτω καθεξής. Πιο συγκεκριμένα, μια επιστήμη ερευνά τις ιδιότητες των αντικειμένων της. Θεωρούσε τη γεωμετρία πρότυπο για όλες τις επιστήμες. Όπως συμβαίνει στη γεωμετρία, κάθε επιστήμη αποδεικνύει τα συμπεράσματά της. Δηλαδή κάθε απόδειξη σε μία επιστήμη αποδεικνύει ότι κάποιο αντικείμενο που ανήκει στο *υποκείμενον γένος* αυτής της επιστήμης διαθέτει κάποια ιδιότητα.

Μ’αυτόν τον τρόπο ο Αριστοτέλης επινόησε την ίδια την ιδέα της *επιστήμης*. Κάθε επιστήμη μελετά διαφορετικά αντικείμενα απ’ ό,τι οι άλλες, αλλά όλες οι επιστήμες έχουν την ίδια δομή, καθώς και την ίδια μεθοδολογία, και διαθέτουν έναν κοινό σκοπό—την επιστημονικήν αλήθεια.

Προχωρώντας από αυτή την ιδέα της επιστήμης, ο Αριστοτέλης βρέθηκε σε θέση να διατυπώσει με ακριβή τρόπο τον *δι*επιστημονικό χαρακτήρα μερικών επιστημών και θεμάτων, και με αυτή την έννοια ήταν και ο εφευρετής της διεπιστημονικότητας—άλλο σημαντικό θέμα που αξίζει περισσότερη μελέτη απ’ ό,τι επιτρέπει ο χρόνος σήμερα.

Τώρα να επιστρέψω λίγο στα μαθηματικά. Όσοι θυμόμαστε αρκετά καλά τη γεωμετρία που διδαχθήκαμε, γνωρίζουμε ότι δεν αποδεικνύονται όλα τα γεωμετρικά γεγονότα. Μάλιστα, όπως δείχνει ο Αριστοτέλης, θα ήταν αδύνατο να αποδειχθούν όλα. Τα βασικότερα γεγονότα δηλώνονται εξ αρχής. Στη γεωμετρία του Ευκλείδη υπάρχουν τρία είδη βασικών γεγονότων:

ορισμοί, *αιτήματα* και *κοινές έννοιες* (που ενίοτε αποκαλούνται *αξιώματα*). Σκοπός των ορισμών είναι να προσδιορίσουν επακριβώς για τί πράγμα μιλάμε. Για παράδειγμα, ο ορισμός του ισοσκελούς τριγώνου ως ενός τριγώνου, το οποίο διαθέτει δύο ίσες πλευρές, αποσαφηνίζει ποια τρίγωνα είναι ισοσκελή. Δεν είναι δυνατό να αποδειχθεί αυτός ο ορισμός. Πρόκειται απλώς για ένα βασικό γεγονός. Η γεωμετρία ξεκινά από τέτοια βασικά γεγονότα για να αποδείξει άλλα γεγονότα.

Ο Αριστοτέλης θεωρούσε τη γεωμετρία πρότυπο για τις άλλες επιστήμες. Άλλωστε, η γεωμετρία είχε προοδεύσει εντυπωσιακά χάρη στον τρόπο με τον οποίο αποδείκνυε τα συμπεράσματά της. Οι γεωμέτρες συμφωνούσαν ως προς τις βασικές αρχές, καθώς και ως προς το πώς λειτουργούν οι αποδείξεις και ως προς το ποιές αποδείξεις είναι επιτυχείς. Κατά συνέπεια έπρεπε να συμφωνούν και ως προς τα συμπεράσματα των αποδείξεών τους. Στη γεωμετρία υπήρχε συναίνεση ως προς τα γεγονότα και τις μεθόδους. Στην αριθμητική υπήρχε παρόμοια συναίνεση. Αυτή η επιτυχία δεν είχε εφάμιλλο σε άλλα επιστημονικά πεδία. Εκεί δεν υπήρχε συμφωνία ούτε ως προς τις βασικές οντότητες: κατά τον Πλάτωνα, υπήρχαν τα τέσσερα στοιχεία (φωτιά, αέρας, νερό και γη), ενώ κατά τον Δημόκριτον οι βάσικες ουσίες και αρχές ήταν άτομα και κενό, και κατά τον Πυθαγόρειο φιλόσοφο Φιλόλαο, υπήρχαν δύο ειδών αρχές, αλλά δεν είναι δυνατόν να πούμε ποιες είναι. Επιπλέον, φαίνεται απίθανο να υπήρχε συμφωνία ως προς το πεδίο μελέτης ή ως προς τις μεθόδους θεμελίωσης ή επιβεβαίωσης ή απόδειξης συμπερασμάτων.

Τα *Ἀναλυτικὰ ὕστερα* απαιτούν κάθε *επιστήμη* να διαθέτει, όπως η Ευκλείδεια γεωμετρία, τρία είδη αρχών: ορισμούς (όπως και στον Ευκλείδη), υποθέσεις (που αντιστοιχούν χονδρικά στα Ευκλείδεια αιτήματα) και κοινές έννοιες ή αξιώματα (που αντιστοιχούν εν μέρει στα Ευκλείδεια αξιώματα). Προτείνουν επίσης αποδεκτές αποδεικτικές τεχνικές και καθορίζουν ότι όταν γνωρίζουμε κάτι μέσω απόδειξης, γνωρίζουμε όχι μόνον ότι είναι αληθές αλλά και γιατί είναι αληθές. Είναι αληθές επειδή συνάγεται από τα βασικά γεγονότα της επιστήμης, τα οποία δηλώνονται στις αρχές.

Υπάρχει σίγουρα στενή σύνδεση ανάμεσα στην Αριστοτελική αντίληψη για την επιστήμη και τη γεωμετρία του Ευκλείδη. Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί αν ο Αριστοτέλης άντλησε τις ιδέες του από τη γεωμετρία, ή αν ο Ευκλείδης άντλησε τις δικές του ιδέες από τον Αριστοτέλη. Εδώ δεν διαθέτουμε τον απαιτούμενο χρόνο για να συζητήσουμε αυτό το ζήτημα, έχουμε όμως λόγους για να πιστεύουμε ότι η απάντηση είναι "και τα δύο" –ότι, αφ' ενός, ο Αριστοτέλης παρέλαβε από προγενέστερους την ιδέα της απόδειξης και του ρόλου των ορισμών και των αξιωμάτων στις γεωμετρικές αποδείξεις, πιθανότατα και των αιτημάτων. Εξέτασε από την οπτική γωνία της λογικής και της μεταφυσικής πώς λειτουργούν οι αποδείξεις και τί μπορούν ή δεν μπορούν να αποδείξουν και γενίκευσε την έννοια της απόδειξης έτσι, ώστε να μην αφορά μόνο στη γεωμετρία αλλά σε κάθε επιστημονικό πεδίο. Φαίνεται όμως ότι, αφ' ετέρου, και η γεωμετρία του Ευκλείδη οφείλει στον Αριστοτέλη διάφορα χαρακτηριστικά τα οποία έχουν ελάχιστο νόημα από την οπτική γωνία της γεωμετρίας, αλλά τα οποία πιθανότατα περιελήφθησαν σε αυτή για να είναι όσο το δυνατόν σύμφωνη προς τις επιταγές του Αριστοτέλη.

Η θεωρία που παρουσιάζεται στα *Αναλυτικά ύστερα* ήταν η πρώτη γενική θεωρία της επιστημονικής εξήγησης που είχε ποτέ διατυπωθεί λεπτομερώς. Εν μεγάλω μέρει, ο Αριστοτέλης μπορούσε να σχηματίσει αυτή τη θεωρία, διότι ήταν σε θέση να εκμεταλλευτεί τη γνώση των συγχρόνων μαθηματικών. Η αυστηρότητα την οποία απαιτεί αυτή η θεωρία παραμένει μέχρι σήμερα ένα επιστημονικό ιδανικό, ακόμα μετά από τις δραματικές αλλαγές που έχουν υποστεί οι αποδεικτικές τεχνικές, κυρίως την εποχή του Γαλιλαίου (ο οποίος, ειρήσθω εν παρόδω, πριν να απορρίψει την Αριστοτελική φυσική βιοποριζόταν δίνοντας διαλέξεις για τα *Ἀναλυτικὰ ὕστερα*, μεταξύ άλλων έργων του Αριστοτέλη).

Ελπίζω πως έχει γίνει εμφανές ότι μπορεί κανείς να πει πολλά ακόμη για τη σχέση του Αριστοτέλη με τα μαθηματικά. Όμως ελπίζω ότι αυτές οι σύντομες παρατηρήσεις σάς έδωσαν μια αρχική ιδέα για το πόσο σημαντικά ήταν τα μαθηματικά για τον Αριστοτέλη, για την κεντρική θέση που κατείχε η σκέψη περί μαθηματικών ζητημάτων σε κάποιες από τις σημαντικότερες φιλοσοφικές ιδέες του και για τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι ιδέες, συνέβαλλαν, με τη σειρά τους, στη διαμόρφωση της μαθηματικής και επιστημονικής σκέψης επί αιώνες και, σε κάποιες περιπτώσεις, επί χιλιετίες.

*

ARISTOTLE AND MATHEMATICS

I am deeply honored to be invited to speak at the inauguration of the Interdisciplinary Center for Aristotelian Studies at the Aristotelian University of Thessaloniki. My sincere thanks to Professor Demetra Sfendoni-Menzou for inviting me to participate in this event as well as for playing so important a role in the foundation of the Center. On a more personal note I want to say that I am delighted that my daughter is here in the room -- I am proud that she is a student in the Architecture School here at the university.

Before talking about mathematics I want to say a word about interdisciplinarity. I cannot stress how important it is to employ an interdisciplinary approach in studying Aristotle. In my mind, the first discipline needed for any proper work in Aristotle is philology -- a knowledge of ancient Greek and in particular of Aristotle's vocabulary, his technical terminology, his syntax, and his style, as well as the unusual history of his text and of the textual tradition. Without this knowledge one is dependent on translations, and anyone who has worked in Aristotle knows how much translations of the same passage can differ from one another. In many cases the differing translations cannot all be correct, and some cases they may well all be wrong. So the first requirement is to be able to work with the original text.

Next, as when working with any ancient author, one needs to be familiar with related authors and texts, in the present case, principally the works of Aristotle's philosophical predecessors, but in some cases other texts as well. Students of the *Poetics* need to be familiar with tragedy, comedy and epic, for example, especially the *Oedipus Tyrannos* and the *Iphigeneia en Taurois*, to which Aristotle frequently refers. Students of Aristotle's biological works should be familiar with earlier work on biological and medical subjects. Students of Aristotle's *Physica, Peri Ouranou, Peri Geneseos kai Phthoras, Meteorologica*, and other scientific works should know about earlier treatments of the same subjects, primarily in Plato and the Presocratic philosophers.

In most cases it is also useful to know something about the later history of the subject up to and including current (twenty-first century) ideas on the Aristotelian field one is investigating. As Professor Sfendoni has shown in many of her publications and many of the conferences she has organized, "Aristotle Today" is a lively topic, and I expect that it will be a focus of much of the work of the new Center.

I would also point out that in an important sense, it was Aristotle who invented the notion of an intellectual discipline, without which it would be impossible to speak of interdisciplinarity. I follow Aristotle in defining a discipline as a field of study marked off from other disciplines by its subject matter. Briefly, before Aristotle, the area that we call *thetikê epistêmê* was not differentiated into different fields. A single writing would cover topics in the theory of matter, physics, cosmology, astronomy, meteorology, psychology and biology. Such works tended to be known by the general title "*Peri Phuseos*," where "*phusis*" covered the entire range of natural phenomena. Aristotle changed this, and he changed it on two levels. First, he had so much to say about so many topics that he devoted entire works to individual subjects, as titles like *Peri Ouranou* and *Meteorologica* indicate. But he backed up this division of knowledge through an elaborate theory of *epistêmê*, set out in the *Analutica Ustera*. The *Analutica Ustera* is a difficult work in many ways, but even so it has had an important role in the history of scientific thought. Perhaps surprisingly, it is not placed among Aristotle's scientific works, but in the series of treatises known as the *Organon*. These are treatises on logic.

The *Analutica Ustera* tells us that each science has a distinct field of subjects that it studies. Aristotle calls this the *upokeimenon genos*, and he gives examples. Arithmetic studies numbers, geometry studies *megethê*. Note that these are examples taken from mathematics. Each *genos* consists of things that naturally go together. Geometry, for example, studies lines, circles, triangles, and so forth.

More specifically, a science investigates the properties of its subjects. Aristotle's favorite example is that every triangle has angles equal to two right angles. Here the subject is 'triangle' and the attribute is 'having angles to two right angles.' In school we learned how to prove this result, and Aristotle knew a proof that was exactly the same as the one we learned, or one that was very close to it. He took geometry as his model for all sciences. As in geometry, every science proves its conclusions, that is, each proof in a science proves that a subject in the subject genus of that science possesses an attribute. Sometimes Aristotle speaks as if the attributes also are part of the subject genus. From that point of view, a science will establish all the provable connections between subjects and attributes in its subject genus.

If we remember our geometry well enough, we remember that not all geometrical facts are proved. In fact, it would be impossible to prove all of them, as Aristotle shows. The most basic facts are stated at the beginning. In Euclid's geometry, there are three kinds of basic facts: definitions, *aitêmata*, and *koines ennoies* (sometimes called *axiômata*). The purpose of the definitions is to specify precisely what we are talking about. For example, the definition of an isosceles triangle as a triangle that has two equal sides makes it clear what triangles are isosceles. There is no way to prove this definition any more than there is a way to prove that a football match lasts 90 minutes. It is just a basic fact. And from these basic facts geometry goes on to prove other facts, for example, that the angles opposite the equal sides in an isosceles triangle are equal.

Aristotle took geometry as a model for other sciences. After all, geometry had made an astonishing amount of progress because of the way it proved its results. Geometers agreed on the principles. They also agreed about how proofs work and what proofs are successful. As a result, they had to agree on the conclusions of their proofs. In geometry there was a consensus about facts and methods. In *arithmetikê* (that is, what we call number theory) there was a similar consensus, and likewise in other branches of mathematics, stereometry, for example. This success was unmatched in other scientific fields. In them there was no agreement about the basic entities: were they the four elements (fire, air, water and earth) as Plato said, following Empedocles, or were they atoms and void as Democritus said, or were they limiters and unlimiteds as Philolaus said? Further it seems unlikely that there was agreement about the scope of their study (what Aristotle calls the subject genus) or about the methods of establishing, confirming or proving results.

The *Analutika Ustera* prescribes that each science (*epistêmê*), like Euclid's geometry, has three kinds of principles: definitions (the same as in Euclid), hypotheses (which correspond roughly to Euclid's postulates) and common principles or axioms (which correspond in part to Euclid's axioms). It prescribes acceptable proof techniques. And it specifies that when we know something through a proof we know both that it is true and why it is true. It is true because it follows from the basic facts of the science, which are stated in the principles.

There is clearly a close connection between Aristotle's view of science and Euclid's geometry. We may wonder whether Aristotle got his ideas from geometry or Euclid got his ideas from Aristotle. There is not time here to discuss this matter, but there is good reason to think that the answer is "both of the above" -- that Aristotle took over the idea of proof and of the role of definitions and axioms in geometrical proofs. Possibly postulates as well. He considered from the standpoint of logic and metaphysics how proofs work and what they can and cannot prove, and he generalized the notion of proof to work not just for geometry but for any scientific field. In turn, Euclid's geometry seems indebted to Aristotle for several features that make little sense from the point of view of geometry but which he seems to have included in order to follow Aristotle's prescriptions as closely as possible.

The theory presented in the *Analutika Ustera* was the first general theory of scientific explanation ever worked out in detail, and the rigor it demanded remains with us today as a scientific ideal. This is true even though proof techniques have changed dramatically, especially since the time of Galileo (who, by the way, before he rejected Aristotelian physics, made a living by giving lectures on the *Analutika Ustera* among other works of Aristotle).

This is one important connection between Aristotle and mathematics. But, to return briefly to the theme of interdisciplinarity, the *Analutika Ustera* also speaks specifically about certain kinds of interdisciplinary work. I am thinking of sciences that are closely related in certain ways. Take optics. In antiquity optics was not the same as it is for us. Today optics is defined as the branch of physics which investigates the behavior and properties of light whereas Aristotle defined optics as the science concerned with lines "in sight" (*en opsei*), where lines are among the subjects studied by geometry. Now this account seems problematic. According to Aristotle's doctrine of the subject genus, if lines are part of the subject genus of geomtry, they cannot be part of the subject genus of a different science; and yet he maintains that optics is a different science from geometry. Fortunately we possess another work of Euclid's that helps us understand what Aristotle means. This work is called *Optics*. In Euclid's *Optics* we find that optics considers how things appear to us; it uses proofs, and it makes use of geometry in those proofs. For example, optics proves that something (A) appears larger than something else (B) by first showing that A appears under a larger angle than B and then invoking the principle that things seen under larger angles appear larger. The first part of the proof is pure geometry, beginning with geometrical definitions and proving a geometrical theorem; the second part depends on a "bridge principle" which relates a geometrical property (one angle is larger than another angle) to the subject matter of optics (things seen under larger angles appear larger). The reference to how things appear has no place in geometry, but it does in optics, which is the science of how things appear. Aristotle describes the relation between these sciences as follows: optics is subordinate to geometry and conversely geometry is superior to optics, in the sense that optics knows the fact (the fact that things seen under larger angles appear larger) and geometry provides the explanation. In some sense, optics is applied geometry. It applies purely geometrical facts to its special subject matter. But it qualifies as a separate science since its subject matter is different, and it has distinct principles (such as the bridge principle used in the sample proof) that apply to optical objects, not geometrical objects. Most of Aristotle's examples involve pairs of sciences, but occasionally he speaks of cases where three sciences fall one under the other. And he once says that in a small way medicine is subordinate to geometry, because the doctor knows that circular wounds heal slowly while geometry provides the explanation. So here we have cases where interdisciplinarity is needed. In order to do optics, one needs to know geometry. In order to do be a specialist in optics it is not necessary to be a specialist in geometry, or even be able to understand fully all the proofs that geometry contains. But it is necessary to be familiar with the principles of geometry and with the theorems that are relevant to the properties that optics studies. So it appears that Aristotle was not only the father of disciplinarity, he was also the father of interdisciplinarity, again making precise determinations of what kind of interdisciplinarity he recognizes and of the role played by each of the contributing disciplines.

I will return now to mathematics. We have seen that Aristotle used mathematical practice as a model for other sciences and that he proposed a radical reform in the other branches of knowledge which, if it were successfully accomplished, would raise them to the rank of true *epistêmê*. I have proposed that Aristotle did this not by making mathematical discoveries of his own, but by reflecting on the nature of mathematics. In other words, by being a philosopher, not by being a mathematician.

In fact, Aristotle was not a mathematician. There are theorems named after Thales and Pythagoras, but none named after Aristotle. According to Darwin, Aristotle was the greatest biologist who ever lived. According to John Rawls, the Harvard professor whose work *A Theory of Justice* is widely recognized as one of the foremost works in the areas of social, political and moral philosohy in the second half of the 20th century, Aristotle's principal work on ethics, *ta Êthika Nikomacheia*, is the best book on moral philosophy that has ever been written. He was the inventor of logic, and his theory of the syllogism is still taught to this day in certain universities. His account of the physical world, in combination with Ptolemy's astronomy held sway for over a millenium and it took the combined genius of Galileo, Kepler and Newton to replace it. But mathematics he left to others.

Nevertheless, he was aware of what was going on in mathematics and he had views on mathematical subjects. There are many references to mathematics in his works. This is a large subject. Thomas Heath, the author of the principal English-language work covering the entire history of Greek mathematics, on his death left behind translations and commentary on the Aristotelian passages relevant to mathematics. To publish this material was evidently a passion of his. After his death his widow wrote that "his eagerness [to complete] this work ... was probably instrumental in hastening his end." The 291 page book was published in 1949 with the title "Mathematics in Aristotle" and it remains one of the principal sources of information on this topic. I have time for only a few examples.

First, Aristotle was up to date at least in some areas of mathematics and understood the technical aspects well enough to voice views. For example, he noted a problem in the theory of parallel lines as it was known in his time, and the need to solve this problem may well be the reason why Euclid introduced two additional postulates into geometry..

Aristotle also drew general conclusions on the basis of what goes on in mathematics. For example, like all triangles, isosceles triangles have angles equal to two right angles, and it is possible to prove this. But it's not enough just to get a correct result, it is important to reach the result in the correct way. Aristotle maintains that it is incorrect to prove this particular result directly; instead we should prove that all triangles have angles equal to two right angles -- which implies immediately that isosceles triangles do.. This example is used to show that proofs should be as general and powerful as possible, not only because it simplifies the work of a science but also because it also puts things in the right order. Isosceles triangles have the property in question because they are triangles. If you have a separate proof that they have that property, you do not understand this essential fact. Your understanding of the subject genus is faulty -- in other words, you don't really know what you are talking about.

The last contribution that I will mention is Aristotle's sophisticated conception of the infinite. The infinite is a concept that is needed in mathematics and in physics. Numbers can be increased *ep' apeiron*; whatever number you take, there is always a number larger than it. Likewise, continuous lines, distances, and times can be divided *ep' apeiron*. You can always divide a line, a distance, or an interval of time in two: if you have a line one meter long you can divide it into two lines half a meter long each; if you have a time interval one minute long you can divide it into two intervals, half a minute long each. And the same holds for the half-meter lines and the half-minute intervals. However far you divide them there are smaller lines and time intervals. Earlier thinkers had discussed the infinite. Zeno in particular had exploited it in order to prove his controversial view that motion is impossible. But for Aristotle, motion is at the heart of physics, since he conceives the objects of physics as things that can undergo motion. This made it imperative for him to refute Zeno's arguments, and in order to do so he needed to get clear on the nature of continuity and of the infinite. He did important work in this direction in *Physics*, not only refuting Zeno's arguments to his satisfaction, but recognizing that the problem of the infinite goes deeper than Zeno realized, and then setting out a theory of the nature of the infinite which, although quite different from today's notion of mathematical infinity, was consistent with his physics, was grounded in his metaphysical distinction between actuality and potentiality, and was the prevalent view (even among mathematicians) until the nineteenth century.

As I have indicated, there is more to say on the subject of Aristotle and mathematics. But I hope that these brief remarks have given you an idea of how important mathematics was for Aristotle, how his reflection on mathematical topics was an important factor in some of his most important philosophical ideas, and in turn how these ideas helped shape mathematical and scientific thought for centuries and in some cases for millenia afterwards.